TI Tutorium 9

Philip Häusler

2. Februar 2009

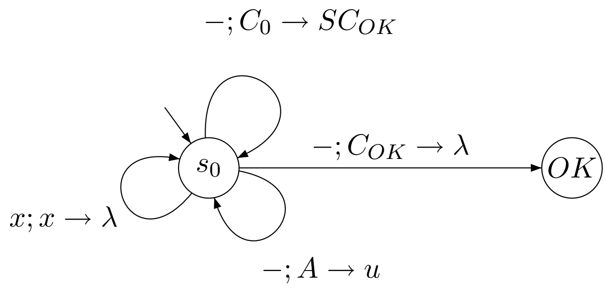
1 PDA (Für Aufgabe 1)

$G = (N, T, P, S)$

$PDA(G)$

$S \underset{S::=w_1}{\rightarrow} w_1 \underset{A_1::=u_1}{\rightarrow} w_2 \underset{A_2::=u_2}{\rightarrow} \cdots \underset{A_n::=u_m}{\rightarrow} w_n$

mit $A = u \in P$

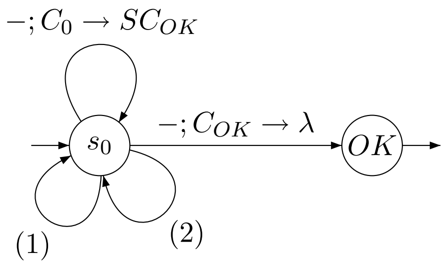


1.1 PDA bauen

$G = (\{S, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit P:

$S ::= aSc|B$

$B ::= bBc|c$



(1): $a; a \to \lambda$

$b; b \to \lambda$

$c; c \to \lambda$

(2): $-; B \to bBc$

$-; B \to c$

$-; S \to aSc$

$-; s \to B$

$(s_0, abc^3, C_0) \mapsto (s_0, abc^3, SC_{OK}) \mapsto (s_0, abc^3, aScC_{OK}) \mapsto (s_0, bc^3, ScC_{OK}) \mapsto (s_0, bc^3, BcC_{OK}) \mapsto (s_0, bc^3, bBc^2C_{OK}) \mapsto (s_0, c^3, Bc^2C_{OK}) \mapsto (s_0, c^3, c^3C_{OK}) \overset{3}{\mapsto} (s_0, \lambda, C_{OK}) \mapsto (OK, \lambda, \lambda)$

Erzeugte Sprache: $L(G) = \{a^n b^m c^{n+m+1} | m, n \in \mathbb{N}$

$S \underset{S::=aSc}{\overset{n}{\to}} a^n S c^n \underset{S::=B}{\to} a^n B c^n \underset{B::=bBc}{\overset{m}{\to}} a^n b^m B c^{m+n} \underset{B::=c}{\to} a^n b^m c^{1+m+n}$

2 Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann $\exists p \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes $z \in L$ mit $|z| \geq p$ zerlegen lässt in $z = uvwxy$ mit $|uwx| \leq p, |vx| > 0, uv^i wx^i y \in L \forall i \in \mathbb{N}$.

Beh. 1: $\{a^n b^n c^i | i \leq n\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis (Widerspruch)

Annahme: L_1 ist kontextfrei. Sei p die Konstante aus dem Pumping-Lemma.

Wähle $z = a^p b^p c^p$. Dann $z \in L_1, |z| \geq p$.

Sei $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq p, |vx| > 0$.

Fall 1.1: $a \cdots \underbrace{\cdots ab \cdots}_{vwx} \cdots b \overbrace{c \cdots c}^{p}$, d.h. $vx = a^m b^n$ mit $m + n \geq 1$.

$\underbrace{a}_{u} \underbrace{\cdots}_{uwx} \underbrace{ab \cdots bc \cdots c}_{y}$, d.h. $n = 0$

$uv^2wx^2y = uvvwxxy = a^{p+m}b^pc^p \notin L_1$ (Mehr a's als b's)

Fall 1.2: $n > 0 (vx = a^m b^n, m \geq 0, n > 0, 1 \leq m + n \leq p)$

$uv^0wx^0y = a^{p-m}b^{p-n}c^p \notin L_1$ (Weniger B's als c's)

Fall 2.1: $a \cdots ab \cdots \underbrace{\cdots bc \cdots}_{vwx} \cdots c$, d.h. $vx = b^m c^n$ mit $1 \leq m + n \leq p, n > 0$.

$m = 0 (a \cdots ab \cdots bc \underbrace{\cdots} vwxc)$

$uv^2wx^2y = a^pb^pc^{p+n} \notin L_1$ (Mehr c's als b's)

Fall 2.2: $m > 0$ (z.B. $v = bc, w = \lambda, x = \lambda, u \underbrace{v v}_{bcbc} wxxy$)

$count(a, uv^2wx^2y) = p$

$count(c, uv^2wx^2y) = p + n > p$, d.h. $uv^2wx^2 \notin L_1$ (Mehr c's als a's)

Alternative: $uv^0wx^0y = a^pb^{p-m}c^{p-n} \notin L_1$ (Weniger b's als a's)

2.1 Nächstes Beispiel

$L_2 = \{a^{2^n} | n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis (Widerspruch)

Annahme bla bla bla, wähle $z = a^{2^p}$. Bla bla bla

$2^p < |uv^2wx^2y| < 2^{p+1}$

$$2^p \leq |uvwxy| < |uvwxy| + \underbrace{|vx|}_{>0} = |uv^2wx^2y| = 2^p|vx| \leq 2^p + p \underset{p<2^p}{<} 2^p + 2^p = 2^{p+1}$$

Z.z. $p < 2^p \forall p \in \mathbb{N}$

1. Fall $(p = 0)$: $0 < 1 = 2^0$

2. Fall $(p > 0)$

IA: $(p = 1) 1 < 2 = 2^1$

IV: Beh. gelte für ein $p \geq 1$.

IS: z.z. $p + 1 < 2^{p+1}$

$p + 1 \underset{p \geq 1}{\leq} p + p \underset{IV}{<} 2^p + 2^p = 2 \cdot 2^p = 2^{p+1}$