TI Tutorium 1

Philip Häusler

3. November 2008

1 Wörter

A: Alphabet

$A*$: Menge aller Wörter über A

$\lambda \in A*$

$v \in A*, x \in A : xv \in A*$

1.1 Beispiel

$A = \{a, b\}$

$A* = \{\lambda, a\lambda, b\lambda, ab\lambda, aa\lambda, bb\lambda, ba\lambda\}$

2 Konkatenation

$\lambda v = v$

$(xu)v = x(uv)$

$v \in A*, x \in A$

3 length

$length(\lambda) = 0$

$length(xu) = 1 + length(u)$

$u \in A*, x \in A$

3.1 Beispiel

$$\begin{aligned} length(\underbrace{a}_{x}\underbrace{bc}_{u}) &= length(bc) + 1 & (1) \\ &= length(c) + 1 + 1 & (2) \\ &= length(\lambda) + 1 + 1 + 1 & (3) \\ &= 0 + 1 + 1 + 1 & (4) \end{aligned}$$

4 trans

$trans : A* \rightarrow A*$

$trans(\lambda) = \lambda$

$trans(xu) = trans(u)x$

$u \in A*, x \in A$

4.1 Beispiel

$$\begin{aligned} trans(\underbrace{a}_{x}\underbrace{bc}_{u}) &= trans(bc)a & (5) \\ &= trans(c)ba & (6) \\ &= trans(\lambda)cba & (7) \\ &= \lambda cba = cba & (8) \end{aligned}$$

5 Vollständige Induktion

Beh.: bla gilt $\forall v \in A*$

Beweis (Vollst. Induktion über v):

I.A.: Zeige bla für $v = \lambda$

I.V.: bla gelte für ein v

I.S.: Zeige bla für xv mit $x \in A$

5.1 Beispiel

Beh. 1: $trans(uw) = trans(w)trans(u) \forall u, w \in A*$

Beweis (Vollst. Induktion über u):

I.A.: Zeige Beh. für $u = \lambda$, d.h. $trans(\lambda w) = trans(w)trans(\lambda) \forall w \in A*$

$trans(\lambda w) \overset{\text{Def. Konk.}}{=} trans(w) \overset{\text{Konvention}}{=} trans(w)\lambda \overset{\text{Def. } trans}{=} trans(w)trans(\lambda)$

Die Behauptung gelte für ein u, d.h. $trans(uw) = trans(w)trans(u) \forall w \in A*$ für ein u.

I.S.: Zeige Beh. für xu mit $x \in A$, d.h.

$trans((xu)w) = trans(w)trans(xu) \forall w \in A*$

$$\begin{aligned} trans((xu)w) &\overset{\text{Def. Konk.}}{=} trans(x(uw)) && (9)\\ &\overset{\text{Def. } trans}{=} trans(uw)x && (10)\\ &\overset{\text{I.V.}}{=} trans(w)trans(u)x && (11)\\ &\overset{\text{Def. } trans}{=} trans(w)trans(xu) && (12) \end{aligned}$$

5.2 Und weil es so schön ist

Beh. 2: $trans(trans(w)) = w \forall w \in A*$

Beweis (Vollst. Induktion über w)

I.A. z.z. $trans(trans(\lambda)) = \lambda$

$trans(trans(\lambda)) \overset{\text{Def. } trans}{=} trans(\lambda) \overset{\text{Def. } trans}{=} \lambda$

I.V.: $trans(trans(w)) = w$ für ein $w \in A*$

I.S.: $trans(trans(xw)) = xw$ mit $x \in A$

$$\begin{aligned} trans(trans(xw)) &\overset{\text{Def. 1 } trans}{=} trans(trans(w)x) && (13)\\ &\overset{\text{Beh. 1}}{=} trans(x)trans(trans(w)) && (14)\\ &\overset{\text{I.V.}}{=} trans(x)w && (15)\\ &\overset{\text{Def. } trans}{=} trans(x\lambda)w \overset{\text{Def. 2 } trans}{=} trans(\lambda)xw\\ &\overset{\text{Def. 1 } trans}{=} \lambda xw \overset{\text{Def. Konkatenation}}{=} xw && (16) \end{aligned}$$